

IV кръг, 9 юли 2014 г., х. Бузлуджа, теоретичен тур

Старша възраст

1 задача. Разстоянията до звездите. Знаменитият физик Исак Нютон е сред първите, успели да оценят правилно огромната величина на разстоянията до звездите. Нютон е считал, че звездите са космически обекти, подобни на Слънцето. Имал е приблизителна представа за разстоянието от Земята до Слънцето – 150 милиона километра, за радиуса на орбитата на Сатурн – 9.5 AU, както и за максималния видим ъглов диаметър на тази планета – около $20''$. Предполагал е, че отражателната способност на Сатурн е 0.5.

- Повторете разсъжденията на Нютон и дайте примерна оценка на разстоянията до звездите.
- Защо Нютон е избрал планетата Сатурн за своите пресмятания?

Решение:

Разстояние от Земята до Сатурн в опозиция:

$$r_{ST} = r_S - r_0 = 9.5 - 1 = 8.5 \text{ AU}$$

Осветеност, създавана на Земята от Слънцето:

$$E_0 = L / 4\pi r_0^2$$

Видим ъглов диаметър на Сатурн от Земята $\delta_{ST} = 20''$

Видим ъглов диаметър на Сатурн от Слънцето $\delta_S = \delta_{ST} \cdot r_{ST} / r_S = 17.89''$

Видима от Слънцето ъглова площ на Сатурн $\sigma_S = \pi \cdot \delta_S^2 / 4$

Светлинна енергия от Слънцето, попадаща върху Сатурн $W = \sigma_S \cdot L / 4\pi$

Осветеност, създавана от Сатурн на Земята $E_S = AW / 2\pi r_{ST}^2$

Осветеност, създавана на Земята от звезда като Слънцето с видим блясък като този на Сатурн $E^* = E_S$

Разстояние до звездата r^*

$$E_0 / E_S = E_0 / E^* = r^{*2} / r_0^2$$

Накрая получаваме: $r^* / r_0 = (r_{ST} / r_0) \cdot (1 / \delta_S) \cdot (8 / A)^{1/2}$, където δ_S е в радиани.

$$r^* / r_0 \approx 390\,000$$

Звездите са примерно 390 000 пъти по-далеч от нас, отколкото Слънцето.

$$390\,000 \text{ AU} \approx 2 \text{ pc} \approx 6.5 \text{ ly}$$

Сатурн е била най-далечната планета, известна по времето на Нютон, а звездната му величина е подобна на звездните величини на ярките звезди, за разлика от другите видими с присти око планети, които са значително по-ярки от звездите.

2 задача. Земната орбита. В една задача от II кръг на олимпиадата от дълбините на космоса се беше появила черна дупка, която прелита през Слънчевата система. В резултат от въздействието ѝ оста на Земята става перпендикулярна на равнината на земната орбита, а земната орбита става по-издължена елипса. Голямата полуос на орбитата на нашата планета се запазва същата, каквато е сега. При преминаването през перихелия за умерените ширини (45°) осветеността от Слънцето по пладне е същата, както сегашната осветеност за същите ширини по пладне при лятно слънцестоене.

- Определете ексцентрицитета на новата орбита на Земята.
- Намерете продължителността на слънчевото денонощие при преминаването на Земята през перихелия и през афелия на орбитата.

Считайте, че сегашната орбита на Земята е кръгова, а наклонът на земната ос към оста на еклиптиката е 23.5° .

Решение:

Осветеност от Слънцето на 45° г.ш. по пладне при перихелийно разстояние по новата орбита:

$$E \propto (1 / r_p^2) \cdot \sin 45^\circ$$

Осветеност от Слънцето на 45° г.ш. по пладне при лятно слънцестоене по сегашната орбита:

$$E_0 \propto (1/a^2) \cdot \sin(45^\circ + \varepsilon)$$

По условие $E = E_0$

$$(1/r_p^2) \cdot \sin 45^\circ = (1/a^2) \cdot \sin(45^\circ + \varepsilon)$$

$$r_p = a (\sin 45^\circ / \sin(45^\circ + \varepsilon))^{1/2} \approx 0.87a \quad r_a = 2a - r_p = 2.13a$$

Както е известно: $r_p = a(1 - e)$

$$e = 1 - r_p/a = 0.13$$

Линейната скорост на Земята по сегашната ѝ орбита е $v_0 = 2\pi a / T$, $T = 365.25^d$

Ъгловата ѝ скорост е $\omega_0 = v_0 / a = 2\pi / T$

Линейната и ъгловата скорост в перихелий са:

$$v_p = v_0((1 + e)/(1 - e))^{1/2} \quad \omega_p = v_p / r_p = \omega_0((1 + e)/(1 - e)^3)^{1/2} \approx 1.310\omega_0$$

В афелий:

$$v_a = v_0((1 - e)/(1 + e))^{1/2} \quad \omega_a = v_a / r_a = \omega_0((1 - e)/(1 + e)^3)^{1/2} \approx 0.777\omega_0$$

Звездно денонощие: $T_0 = 23h 56m$

Видимата ъглова скорост на денонощното движение на Слънцето по небето в перихелий: $\omega_{0p} = 2\pi /$

$$T_0 - \omega_p$$

В афелий: $\omega_{0a} = 2\pi / T_0 - \omega_a$

Слънчево денонощие в перихелий $T_{0a} = TT_0 / (T - 1.310T_0) \approx 24h 00m 50s$

В афелий $T_{0a} = TT_0 / (T - 0.777T_0) \approx 23h 58m 44s$

Задача 3. Извънгактични цивилизации. В спектъра на спиралната галактика NGC 1090 линията Ca II K (лабораторна дължина 3933.7 ангстрьома) се наблюдава при 3969.9 ангстрьома. Видимите ъглови размери на галактиката са $4.0' \times 1.7'$.

Изчислете диаметъра на галактиката.

През XXIII век земните астрономи получават едновременно сигнали от представителите на две извънземни цивилизации – магнитните Байрямиди, намиращи се във видимия от Земята северен край на малката полуос на NGC 1090, и ултравиолетовите Григориди, от южния край. Съобщението от цивилизацията на Байрямидите гласи, че те са създали космически кораб, който развива скорост до 0.999753 от скоростта на светлината и първото му изстрелване предстои. Мъдрите Байрямиди живеят максимум 3800 земни години. От съобщението на безгрижните Григориди се разбира, че поради резките климатични промени тяхната цивилизация ще изчезне в близките 25 хиляди земни години.

Възможно ли е спасителна пилотирана мисия с космическия кораб на Байрямидите да достигне до Григоридите и да им помогне?

Решение:

$$\Delta\lambda/\lambda_0 = v_R/c \Rightarrow \text{Лъчевата скорост на галактиката е } v_R = 2760.8 \text{ km/s}$$

$$v = Hr, H = 70 \text{ km/(s.Mpc)} \Rightarrow \text{Разст. до галактиката е } r = 39.4 \text{ Mpc}$$

$$\delta A = 4.0', \text{ Диаметърът на галактиката е } D = \delta r = 45.8 \text{ kpc} = \mathbf{149.4 \text{ kly}}$$

$$\delta B = 1.7', \cos i = \delta B/\delta A \Rightarrow \text{Наклонът на галактиката е } i = 64.8 \text{ deg}$$

Разликата в разстоянията до двете цивилизации е $\Delta r = D \cdot \sin i = 135.2 \text{ kly} \Rightarrow \Delta t = 135 \text{ 000 yr}$ е разликата във времената на излъчване на сигналите

I вариант: Северният край на малката полуос на галактиката е по-близо $\rightarrow$ Съобщението на Ники е изпратено 135 хил. години след това на Дамян и Дамян вече са изчезнали.

II вариант: Южният край на малката полуос е по-близо $\rightarrow$ Съобщението на Ники е изпратено 135 хил. години по-рано. Ако корабът е изстрелян скоро след съобщението в тази посока, той може да достигне Дамян 149 хил. години по-късно или 14 хил. години след съобщението от жителите на Дамян, когато цивилизацията още ще съществува. За екипажът на кораба пътуването ще отнеме време

$$t [\text{yr}] = 149000/\gamma, \gamma = 1/(1-(v/c)^2)^{1/2} = 45.0 \rightarrow t = 3310 \text{ yr, което е по-малко от максималната продължителност на живота при Ники. Теоретично е възможно да се осъществи пряк контакт.}$$

4 задача. Звезди по еклиптиката.

- Докажете, че звездите, които лежат на еклиптиката, би трябвало да променят своите болометрични звездни величини с период точно равен на една година.

- Намерете амплитудата на това изменение. Възможно ли е то да бъде забелязано с помощта на съществуващата днес наблюдателна апаратура?

Решение:

Поради движението на Земята около Слънцето, планетата ни променя посоката си на движение, относно далечните звезди с период точно една година. Следователно, с такъв период се променятлъчевите скорости на звездите, относно земния наблюдател.

Ще считаме, че Земята се движи по кръгова орбита с постоянна скорост $V=30\text{km/s}$.

Това е амплитудата налъчевата скорост на Земята, относно звездите, които са разположени в равнината на еклиптиката. Следователно, максималното червено преместване, което те имат тези звезди за земен наблюдател е:

$$z = \frac{v}{c} = 0,001$$

Стойността на това червено отместване в спектъра на една звезда, разположена на еклиптиката, ще се променя с такава амплитуда и период равен на периода на изменение налъчевата скорост. т.е една година.

Ако означим с v_0 истинската честотата на един фотон (в отправна система в която източникът му е неподвижен), а v е наблюдаваната му честота в отправна система, спрямо която източникът има някаквалъчева скорост v , то:

$$z = \frac{v_0 - v}{v},$$

Откъдето:

$$v = \frac{v_0}{z + 1}.$$

Известно е, че връзката между честотата и енергията на един фотон се дава с равенството:

$$E = hv,$$

където h е константата на Планк.

Това, означава, че вследствие на червеното отместване наблюдаваната енергия на всеки един фотон, отслабва $(1+z)$ пъти, спрямо енергията, която бихме регистрирали, ако бяхме неподвижни, спрямо източника му. Болометричната осветеност, която един източник създава е равна на сумата на всички фотони, които приемаме от него за единица време. При наличието на червено отместване сумарният брой фотони се запазва, но енергията на всеки един от тях намалява $(1+z)$ пъти. Следователно, толкова намаляма и сумарната осветеност от източника.

Промяната в звездната величина (Δm), дължаща се на този ефект можем да пресметнем, използвайки закона на Погсон, записан по следния начин:

$$\Delta m = 2.5 \lg (1 + z).$$

Получихме, че в случая за Земята $z=0,001$, откъдето пресмятаме, че:

$$\Delta m = 0,001^m$$

5 задача. В орбита около Луната навлиза “Звездата на смъртта 3” – огромен космически кораб с диаметър 900 км, пилотиран от предводителя на ситхите Теодор Алексиев. Корабът е покрит с поглъщащ всяко електромагнитнолъчение слой, което прави станцията невидима за непосредствено наблюдение. Обаче при преминаване пред диска на Луната, тя може да се види като тъмен кръг на фона на лунната повърхност. Започналите наблюдения показаха, че тя се движи по кръгова орбита, като преминава близо до центъра на лунния диск на всеки 3 часа 35 минути и 25 секунди.

- Определете на каква височина над лунната повърхност се движи огромният космически кораб.
- Възстановете, доколкото е възможно, кривата на блясъка на Луната в пълнолуние, като спазвате мащаба по оста на времето и по оста на звездните величини. Означете времената на характерните точки на преминаването на станцията пред Луната. Дайте необходимите схеми и кратки обяснения.

Приемете, че орбитата на Луната е кръгова.

Решение: За да определим на каква височина се движи “Звездата на смъртта” над лунната повърхност, трябва да определим периода ѝ на обикаляне около Луната. Интервалът от време за преминаване на кораба близо до центъра на Лунния диск е равен на синодичния период за земен

наблюдател. Понеже няма информация за положението на наблюдателите по земната повърхност, а периодът е даден с голяма точност, предполагаме че става дума за синодичния период относно линията Земя – Луна. Посоката на движение на кораба около Луната не е дадена, поради което ще разгледаме два случая – на право и обратно движение.

Нека корабът обикаля около Луната в посоката на орбиталното ѝ движение. Тогава за връзката между синодичния и сидеричния период на кораба може да напишем:

$$\frac{1}{T_{Syn}} = \frac{1}{T_{Sid}} - \frac{1}{T_L}, \quad \frac{1}{T_{Sid}} = \frac{1}{T_{Syn}} + \frac{1}{T_L}$$

$$T_{Sid} = \frac{T_{Syn} \cdot T_L}{T_L + T_{Syn}} = 0^d.1488 = 3^h34^m15^s = 12855^s$$

За случая на обикаляне на кораба в посока обратна на орбиталното движение на Луната, пишем съотношенията:

$$\frac{1}{T'_{Sid}} = \frac{1}{T_{Syn}} - \frac{1}{T_L}$$

$$T'_{Sid} = \frac{T_{Syn} \cdot T_L}{T_L - T_{Syn}} = 0^d.150424 = 3^h36^m37^s = 12997^s$$

Радиуса на орбитата намираме от третия закон на Кеплер. За движението в права посока:

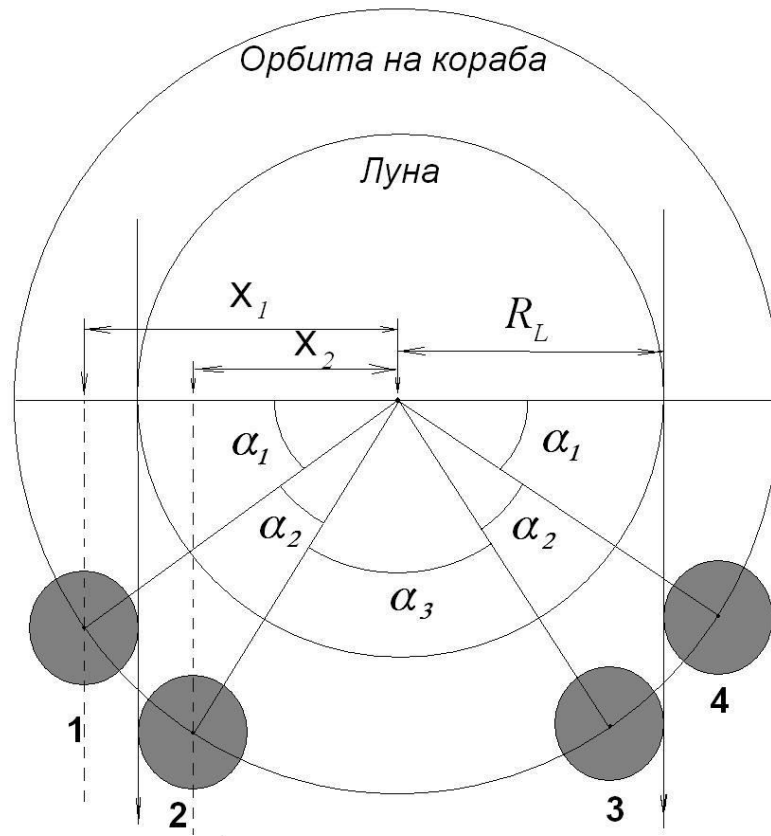
$$r = \sqrt[3]{T_{Sid}^2 \frac{\gamma \cdot M_L}{4\pi^2}} = 2738 \text{ km}$$

Тогава височината над повърхността на Луната е : $h = r - R_L = 1000 \text{ km}$

За движението в обратна посока, пресмятаме радиуса на орбитата, като използваме сидеричния период, получен за случая на обратно движение и получаваме:

$$\begin{aligned} r' &= 2758 \text{ km} \\ h' &= r' - R_L = 1020 \text{ km} \end{aligned}$$

Приемаме, че Луната е достатъчно далеч в сравнение на размерите на орбитата кораба и затова ще строим посоките към наблюдателя успоредни.



Фиг. 1

На Фиг.1 са показани характерни моменти от пасажа на кораба върху диска на Луната. Поради близостта на кораба до повърхността на Луната, за да определим времето на всеки един от контактите, трябва да определим ъглите на които корабът се е придвижил по своята орбита. От Фиг.1 се вижда, че са в сила следните съотношения:

За първи контакт:

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_1}{r} = \frac{R_L + R_{DS}}{r} = 0.8, \quad \alpha_1 = \arccos\left(\frac{R_L + R_{DS}}{r}\right) = 37^\circ$$

За втори контакт:

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{x_2}{r} = \frac{R_L - R_{DS}}{r} = 0.47, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 62^\circ$$

За трети контакт:

$$\alpha_3 = 180^\circ - 2(\alpha_1 + \alpha_2) \approx 56^\circ, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 118^\circ$$

За четвърти контакт:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 143^\circ$$

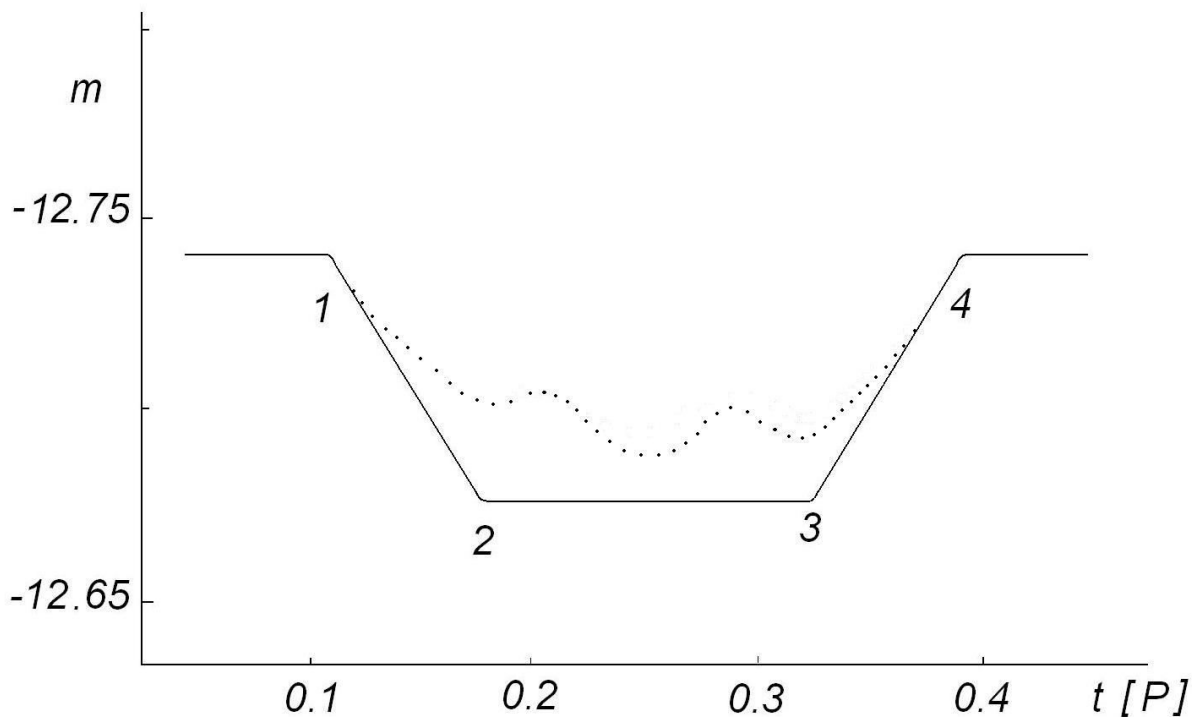
Делим ъглите на 360 градуса и получаваме времената на контактите в части от синодичния период на кораба. Умножавайки полученият резултат по стойността на синодичния период, получаваме времената в денонощия (времето се приема за нула, когато “Звездата на смъртта” се намира в най-източната точка на орбитата си, откъдето се отчитат и ъглите, пресметнати по-горе):

$$\text{За точка 1: } t_1 = 0.1026 \cdot T_{\text{Syn}} = 0^{\text{d}}.01535$$

$$\text{За точка 2: } t_2 = 0.1721 \cdot T_{\text{Syn}} = 0^{\text{d}}.02574$$

$$\text{За точка 3: } t_3 = 0.3280 \cdot T_{\text{Syn}} = 0^{\text{d}}.04906$$

$$\text{За точка 4: } t_4 = 0.3974 \cdot T_{\text{Syn}} = 0^{\text{d}}.05945$$



Фиг. 2

Разликата в звездните величини в минимум и максимум се определя от отношението на площите на Луната без площта и на Луната, засенчена от “Звездата на смъртта” :

$$\Delta m = -2.5 \lg \left(\frac{S_L - S_{DS}}{S_{DS}} \right) = 0^m.075$$

Ако повърхността на Луната беше с равномерна отразителна способност, кривата на блясъка би следвала непрекъснатата крива. Минимумът е плосък, защото дискът на Луната като цяло, изглежда равномерно осветен от Слънцето поради особеностите в разсейването на светлината от лунната повърхност (както е и при други планети).

Обаче повърхността на Луната не отразява еднакво във всички точки. Има големи области от лунната повърхност, наречени “морета” и “океани”, чието алbedo е почти два пъти по малко от средното алbedo на Луната. Когато “Звездата на смъртта” преминава над Окена на бурите и на Морето на спокойствието, който са разположени около екватора на Луната, тя засенчва по слабо отразяваща повърхност и затова спира съществено по-малко светлина, отколкото когато е над някоя по-светла, континентална област на Луната. Затова кривата на блясъка би била неправилна и с по-малка звездна величина, т.е. по-ярка, отколкото при равномерно “отразяваща” Луна. Кривата на блясъка, при която е отчетен (приблизително), този ефект е построена с точки, върху другата крива на блясъка.

Справочни данни:

Орбитален период на Луната	– 27 ^d .32
Маса на Луната	– 7.35×10 ²² kg
Радиус на Луната	– 1738 km
Гравитационна константа	– 6.67×10 ⁻¹¹ N.m ² .kg ⁻²
Звездна величина на Луната в пълнолуние	– -12.74 ^m